Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Peter Rupp
M.Sc. Jonathan Wunderlich

12. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2017/18

18. Januar 2018

Abgabe bis 25. Januar 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 45 (K):

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner seien die Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Zudem genügen f und g den folgenden Eigenschaften:

(1) $f(a) \leq g(a)$.

(2) $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Zeigen Sie, dass $f \leq g$ auf $[a, b]$ gilt.

(ii) Es sei $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(1) = 1$ und

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2} \qquad \text{für alle } x \in [1, \infty).$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $c := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert und $c \leq 1 + \frac{\pi}{4}$ gilt.
Hinweis: Finden Sie eine geeignete Funktion g und wenden Sie Aufgabenteil (i) an.

Aufgabe 46:

(i) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Additionstheoreme für sinh und cosh:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(b) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

(c) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

(ii) Es sei $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ (*Cotangens Hyperbolicus*).

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist und $f((0, \infty)) = (1, \infty)$.

(b) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arcoth} := f^{-1}$, berechnen Sie deren Ableitung und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 47 (K):

(i) Es sei $p > 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls Sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\log(x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\log(x)}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$.

(ii) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls er existiert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})\right).$$

(iii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Beweisen Sie, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 48:

(i) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Ferner sei die Funktion $f_\alpha \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von α die Funktion f_α stetig, differenzierbar, bzw. stetig differenzierbar ist und geben Sie, falls existent, die Ableitung an.

(ii) Es sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, sowie $g^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Anmeldung zum Übungsschein Analysis I

Die Anmeldung zum Übungschein ist ab sofort möglich. Sie erfolgt über das Online-Portal

`https://campus.studium.kit.edu/exams/registration.php`

Anmeldeschluss ist der **08.02.2018**. Nähere Informationen finden Sie auf dem zweiten Merkblatt auf der Vorlesungshomepage.

Lust auf feiern, tanzen, abgehen oder einfach nur bei einem Whisky ein gemütliches Nachthimmel-Ambiente zu genießen?

Dann komm zum Eulenfest am **Donnerstag, den 25. Januar**. Im Foyer des Infobaus wird es dort **ab 19 Uhr** Glühwein und warmes Essen geben, später sorgt DJ Patrick Schepanek für ausgelassene Stimmung im Westfoyer, Bier für alle, Shots für die Harten. Im Ostfoyer erwartet euch ein Whiskystand, und zur Stärkung gibst im Durchgang Gegrilltes, Waffeln und noch mehr, im Owlstellaren Raum.

Also, den 25. Januar sofort im Kalender eintragen, und wer noch helfen will, darf sich gerne in die Helferlisten unter www.redseat.de/Eulenfest17 eintragen